**Раздел II**

**Введение в математический анализ**

**Элементы теории множеств**

**п.1. Множества и операции над ними**

Понятие множества является одним из основных в математике. Оно принадлежит к числу первичных, не определяемых через более простые.

Под *множеством* будем понимать совокупность предметов или объектов, объединенных по какому-либо признаку. Синонимами слова «множество» являются «семейство», «совокупность», «система», «набор» и др. Примером множества является множество книг в данной библиотеке, множество студентов в данной аудитории, множество вершин данного многоугольника, множество натуральных чисел и т. д.

Предметы (объекты), из которых состоит множество, называются его *элементами*. В приведенных выше примерах книги данной библиотеки, студенты, находящиеся в данной аудитории, вершины данного многоугольника, натуральные числа являются элементами соответствующих множеств.

Множества обычно обозначают большими буквами латинского алфавита: А, B, C, … , а их элементы – соответствующими малыми буквами: . Тот факт, что есть элемент множества (элемент принадлежит множеству ) символически записывается так: . Запись или ( не принадлежит множеству ) означает, что не является элементом множества . Если ─ некоторые элементы, то запись означает, что множество состоит из элементов .



Множество называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа элементов, и *бесконечным* ─ в противном случае. Например, множество букв в алфавите, множество страниц в данной книге, множество студентов данного ВУЗа ─ конечные множества, а множество точек прямой, множество целых чисел ─ бесконечные.

Если множество содержит конечное число элементов, бывает удобно задать это множество перечислением всех его элементов. Например, множество студентов группы определяется списком в журнале; множество натуральных чисел, меньших 5, можно записать так: .



Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается символом Ø. Например, пустым является множество треугольников, длины сторон которых равны 5 см, 7 см и 15 см. Из геометрии известно, что треугольника с такими длинами сторон не существует. Ни одного элемента не содержит и множество рациональных чисел, квадрат которых равен двум.

Два множества и называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. В этом случае пишут: . Так, равными будут множество простых чисел, меньших пяти и множество корней квадратного уравнения (и то, и другое состоит из двух чисел: 2 и 3).



Пусть и ─ непустые множества. Если каждый элемент множества является вместе с тем и элементом множества *B*, то называют *подмножеством* множества (обозначают: или ; читается: “множество содержится во множестве *B* ” или “множество содержит (или включает) множество ”). Так, множество простых чисел есть подмножество множества целых чисел; множество целых чисел, в свою очередь, является подмножеством множества рациональных чисел и т. д. Пустое множество является подмножеством любого множества, в том числе и пустого.



**Операции над множествами**

Пусть и ─ произвольные множества.



***Определение.*** *Объединением* *множеств* *и называется множество, обозначаемое и состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств*.



Символически это определение можно записать так: . Например, если , , то ; если ─ множество студентов группы, написавших контрольную на “1”, “2”, “3”, “4”, а ─ множество студентов той же группы, написавших контрольную на “5” и выше, то ─ множество всех студентов группы.



***Определение*.** *Пересечением* *множеств* *и называется множество, обозначаемое и состоящее из всех элементов, принадлежащих как* *множеству* , *так и множеству* , *т. е.* .



Например, ; если ─ множество всех четных чисел, ─ множество простых чисел, то .



Если множества и не имеют общих элементов, то говорят, что эти множества не пересекаются или что их пересечение ─ пустое множество, и пишут Ø. Например, Ø.



Пересечение любого множества с пустым множеством есть, очевидно, пустое множество: ØØ.



***Определение*.** *Разностью**множеств* *и называется множество, обозначаемое и состоящее из тех элементов множества* , *которые не принадлежат множеству* , *т. е.* .



Например, ; раз-ностью множества натуральных чисел и множества нечетных чисел является множество четных чисел, больших или равных двум.



В дальнейшем будем предполагать, что все рассматриваемые нами множества являются подмножествами некоторого фиксированного (универсального) множества . Тогда для любого множества , принадлежащего множеству , справедливы равенства: , .



*Пусть* ─ подмножество множества .



***Определение*.**  *Дополнением**множества* *во множестве называется множество, обозначаемое и состоящее из всех тех элементов множества* , *которые не принадлежат множеству* , *т.е.* .



Например, если ─ множество целых чисел, ─ множество целых чисел, меньших или равных нулю, то ─ множество натуральных чисел. Очевидно, что объединение множества и его дополнения есть универсальное множество: ; пересечение множества со своим дополнением есть пустое множество: Ø.



**п. 2. Числовые множества**

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. К числовым множествам относятся:

 – множество *натуральных* чисел;

 – множество *целых* чисел;

 – множество *рациональных* чисел;

 – множество *действительных* чисел. Оно содержит рациональные и иррациональные числа. Всякое рациональное число можно представить либо в виде конечной десятичной дроби, либо в виде бесконечной десятичной периодической дроби. Например,  – рациональные числа.

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными*. Они выражаются бесконечной десятичной непериодической дробью. Например,  – иррациональные числа.

Геометрически множество действительных чисел изображается точками числовой прямой (числовой оси), т.е. прямой, на которой выбрано начало отсчета, положительное направление и единица масштаба.

Между множеством действительных чисел и множеством точек числовой прямой существует взаимно-однозначное соответствие. Это означает, что каждому действительному числу  соответствует единственная точка на числовой оси и, наоборот, каждой точке числовой оси соответствует единственное действительное число.

**п. 3. Логические символы**

Многие математические понятия удобно записывать, пользуясь логической символикой. Так, символ , называемый *квантором общности*, используется вместо слов «любой», «каждый», «всякий» и т. д., символ  – *квантор существования* – вместо слов «существует», «найдется» и т. д. Часто используются также логические символы *следствия*  (заменяет слово «следует») и *равносильности*  (заменяет слова «равносильно», «тогда и только тогда», «необходимо и достаточно» и т. д.)

**п. 4. Числовые промежутки. Окрестность точки**

Пусть  и  – действительные числа, причем . Будем рассматривать следующие множества:

 – отрезок (замкнутый промежуток);

 – интервал (открытый промежуток);

;  – полуинтервалы;

; ;

;  – бесконечные полу-интервалы;

 – бесконечный интервал. .

Числа  и  называются соответственно левым и правым концами этих промежутков. Символы  и  (символы бесконечности) – это не числа, а символическое обозначение процесса неограниченного удаления точки числовой прямой влево и вправо от начала отсчета.

Пусть  – любое действительное число (точка на числовой прямой).

*Окрестностью* точки  называется любой интервал, содержащий точку . В частности, интервал , где , называется *– окрестностью* точки .

Если , то выполняется неравенство , или, что то же самое . Последнее неравенство означает, что точка  находится в *–* окрестности точки .

**п. 5. Ограниченные множества**

Пусть *Х* *–* подмножество множества действительных чисел, содержащее хотя бы один элемент.

***Определение*.** Множество *Х* называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует такое число  (), что для любого  выполняется неравенство . Число  (число ) в этом случае называется *верхней* (*нижней*) *гранью множества* *Х*.

Множество, ограниченное и сверху, и снизу, называется *ограниченным*, т.е. ограниченное множество *–* это такое множество *Х*, для любого элемента  которого выполняется неравенство . Это неравенство показывает, что множество *Х* ограничено в том и только в том случае, если оно расположено на некотором конечном отрезке числовой прямой

Очевидно, что множество *Х* ограничено тогда и только тогда, когда существует положительное число *С*, такое, что

.

Примером ограниченного множества может служить любой конечный промежуток: . Интервал  есть множество, ограниченное снизу, но неограниченное сверху.

Множество, не ограниченное сверху или снизу, называется *неограниченным*.

Любое ограниченное сверху множество *Х* имеет бесконечное множество верхних граней. Например, интервал  *–* множество, ограниченное сверху. В качестве верхней грани  этого множества можно взять число 5 или любое число, большее чем 5.

Аналогично, любое ограниченное снизу множество *Х* имеет бесконечное множество нижних граней. Если число  *–* нижняя грань этого множества, то всякое число, меньшее , тоже будет нижней гранью *Х*.

***Определение*.** Наименьшая (наибольшая) из всех верхних (нижних) граней ограниченного сверху (снизу) множества *Х* называется *точной верхней* (*нижней*) *гранью этого множества* и обозначается символом  (читается: «супремум *Х* (инфимум *Х*)»).

Например, для отрезка : ; для интервала :  .

Приведенные примеры показывают, что точные верхняя и нижняя грани множества могут принадлежать или не принадлежать этому множеству.

Возникает вопрос: при каких условиях числовое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань? Ответ дает следующая теорема.

***Теорема.*** *Всякое ограниченное сверху* (*снизу*) *числовое множество имеет точную верхнюю* (*нижнюю*) *грань*.

**п. 6. Понятие функции. Способы задания функции**

Пусть *Х* и *Y* *–* два непустых множества. Если каждому элементу  по определенному правилу  поставлен в соответствие единственный элемент , то говорят, что на множестве *Х* задана функция . Символически функцию можно записать в виде . Если , то функцию называют *числовой*. При этом  называют *независимой переменной* (или *аргументом* функции), а  *–* зависимой переменной (или *значением* функции). Множество *Х* называется *областью определения* (или *существования*) *функции*  и обозначается  (или ), а множество *Y* *–* множеством значений функции  и обозначается  (или ).

Если на некотором множестве *Х* определена функция , то значение этой функции, соответствующее некоторому значению аргумента , обозначается  и называется *частным значением функции* . Например, если , то .

Чтобы задать функцию , необходимо указать правило, позволяющее, зная , находить соответствующее значение .

Наиболее часто встречаются три способа задания функции: аналитический, табличный и графический.

1. *Аналитический способ*: функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений.

*Например*: .

При аналитическом способе задания область определения функции обычно не указывают, понимая под нею то множество значений аргумента , для которого данная функция имеет смысл. Так, областью определения функции  является отрезок .

1. *Графический способ*: задается график функции. При этом значения функции , соответствующие тем или иным значениям аргумента , находятся непосредственно из этого графика.
2. *Табличный способ*: функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих им значений функции. Например, известны таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы и т.д.

**п. 7. Основные характеристики функций**

Функция  называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве *Х*, если для любых значений , удовлетворяющих условию , справедливо неравенство .

Если для любых , удовлетворяющих условию , справедливо неравенство , то функция  называется *неубывающей* (*невозрастающей*) на множестве *Х*.

Возрастающие, невозрастающие, убывающие, неубывающие функции на множестве *Х* называются *монотонными* на этом множестве, а возрастающие и убывающие *–* *строго монотонными*.

Функция, все значения которой равны между собой, называется *постоянной* и обозначается  *– сonst*.

Функция, определенная на множестве *Х*, называется *ограниченной* на этом множестве, если существует такое число , что для всех  выполняется неравенство .

Например, функция ограничена на всей числовой прямой, так как  для любого .

Функция , определенная на множестве *Х*, называется *четной*, если для любого  выполняются условия  и ; *нечетной*, если для любого  выполняются условия  и .

График четной функции симметричен относительно оси , а нечетной *–* относительно начала координат.

Например,  *–* четные функции, а  *–* нечетные функции;  *–* функции общего вида (ни четные, ни нечетные).

Функция , определенная на множестве *Х*, называется *периодической* на этом множестве, если существует такое число , что для любого  значение  и . Число  называется при этом *периодом* функции. Очевидно, что если  *–* период функции, то ее периодами будут также числа , где  Наименьший положительный период функции называется *основным*. Например, у функции  основной период .

**п. 8. Обратная функция. Сложная функция**

Пусть  *–* некоторая функция с областью определения *Х* и множеством значений *Y*. Если функция  такова, что каждому элементу  соответствует единственный элемент , такой что , то говорят, что функция  имеет *обратную* . Для этой функции *Y –* область определения, а *Х* *–* множество значений.

Функции  и  называются *взаимно-обратными*. Чтобы найти функцию , обратную к функции , достаточно решить уравнение  относительно переменной  (если это возможно). Примерами взаимно-обратных функций являются:  и ;  и .

Из определения обратной функции следует, что функция  имеет обратную тогда и только тогда, когда функция  задает взаимно-однозначное соответствие между множествами *Х* и *Y*. Отсюда следует, что *любая строго монотонная функция имеет обратную*. При этом, если функция возрастает (убывает), то обратная функция также возрастает (убывает).

Если в записи обратной функции  аргумент обозначить через , а значение функции *–* через , то функция, обратная функции  запишется в виде . При этом, графики взаимно-обратных функций  и  симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Пусть  *–* некоторая функция с областью определения *U* и множеством значений *Y*, а  *–* функция с областью определения *Х* и множеством значений *U*. Тогда функция , определенная на множестве *Х*, называется *сложной функцией* или *суперпозицией функций*  и  или *композицией функций*  и . Переменная  называется при этом *промежуточной переменной*. Например,  *–* сложная функция, определенная на всей числовой прямой, так как , . Сложная функция может иметь несколько промежуточных аргументов.

**п. 9. Основные элементарные функции**

К основным элементарным функциям относятся следующие:

1. *Постоянная* функция  *– сonst*;
2. *Степенная* функция ;
3. *Показательная* функция ;
4. *Логарифмическая* функция ;
5. *Тригонометрические* функции ;
6. *Обратные тригонометрические* функции  .

Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления) и операций образования сложной функции, называется *элементарной функцией*.

Примерами элементарных функций могут служить следующие функции:

.

Функции  элементарными не являются.